

Seconda Prova Scritta - 01 Settembre 2023

Traccia di Matematica

Svolgere quattro dei seguenti esercizi, giustificandone adeguatamente i passaggi.

Esercizio 1. Sia data nel piano una circonferenza D di raggio r . Si costruiscano esternamente ad essa tre circonferenze di medesimo raggio R (non necessariamente uguale a r) tangenti esternamente tra loro e tangenti a D . Si determini R .

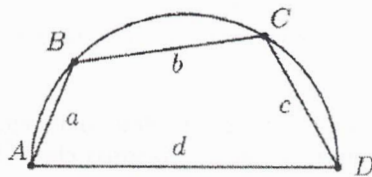
Esercizio 2. Dopo aver dimostrato che il quadrato di un numero intero positivo è pari se e solo se tale numero è pari, si dimostri che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Esercizio 3. Aldo si è accordato con la società Beta a lavorare in data 01-09-2023 per un determinato numero di ore, l , da lui decise e retribuite ad un salario orario di 8 euro. A fine giornata, Aldo utilizzerà la totalità degli introiti così ottenuti nell'acquistare una quantità reale $x \geq 0$ di un bene B , al prezzo unitario di 1 euro (ad esempio, l'acquisto di 3 unità del bene B comporterà una spesa di 3 euro). L'acquisto di x unità del bene B gli genera piacere mentre le l ore di lavoro inducono in lui dispiacere. Complessivamente il suo benessere è descritto dall'espressione $x - l^2$. Determinare le ore lavorate da Aldo nella giornata per massimizzare il proprio benessere. Risolvere l'esercizio nell'ipotesi che l e x siano variabili reali, dunque, non necessariamente intere o razionali.

Esercizio 4. Arianna e Bruno sono iscritti al concorso di ammissione allievi alla classe di scienze sociali della Scuola Superiore Sant'Anna di Pisa. I 100 partecipanti, con un sorteggio, vengono sistemati 70 in un'aula e 30 in un'altra. Qual è la probabilità che Arianna e Bruno finiscano nella stessa aula?

Esercizio 5. Nell'isola dove vivono solo cavalieri (che dicono sempre il vero) e furfanti (che dicono sempre il falso), l'ufficio postale è piuttosto affollato. Ci sono quattro file agli sportelli: una con 9 persone, una con 10, una con 11 e una con 12 persone. Ognuno dei presenti (tranne i primi tre di ciascuna fila) dice la frase "tra le persone davanti a me nella mia fila ci sono almeno tre furfanti". Quanti sono in tutto i cavalieri all'ufficio postale?

Esercizio 6. Consideriamo un quadrilatero con lati di lunghezza a , b , c e d , inscritto in un semicerchio di diametro d , come illustrato di seguito:



Si dimostri che vale la relazione

$$d^3 - (a^2 + b^2 + c^2)d - 2abc = 0.$$