

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. L'esercizio sarà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Per ogni numero reale positivo x , indichiamo con $\text{approx}(x)$ la migliore approssimazione intera di x , definita in questo modo:

- se nella rappresentazione decimale di x la prima cifra dopo la virgola è 0, 1, 2, 3, 4, allora $\text{approx}(x)$ si ottiene da x scartando la parte decimale,
- se nella rappresentazione decimale di x la prima cifra dopo la virgola è 5, 6, 7, 8, 9, allora $\text{approx}(x)$ si ottiene da x scartando la parte decimale e aumentando di uno la parte intera.

Così, per esempio, $\text{approx}(14) = \text{approx}(14,492) = 14$ e $\text{approx}(33,5) = \text{approx}(33,502) = 34$.

(a) Determinare tre numeri reali positivi x_1, x_2, x_3 tali che

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000 \quad \text{e} \quad \text{approx}(x_1) + \text{approx}(x_2) + \text{approx}(x_3) \neq 1000.$$

(b) Siano dati 500 numeri reali positivi x_1, x_2, \dots, x_{500} tali che

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{500} = 1000.$$

Determinare il massimo ed il minimo valore possibile per

$$\text{approx}(x_1) + \text{approx}(x_2) + \dots + \text{approx}(x_{500}).$$

(c) Determinare tutti i numeri reali positivi x tali che

$$\frac{x}{2023} = \text{approx}\left(\sqrt{\text{approx}(x)}\right).$$

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. L'esercizio sarà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

La Scuola Sant'Anna intende acquistare in data 1/1/2024 due hard disk dello stesso tipo. Ciascuno di questi hard disk funziona bene per tutto un anno con probabilità p , e di conseguenza si guasta nel corso di un anno con probabilità $1 - p$.

- Determinare la probabilità che *entrambi* gli hard disk si guastino nel corso dei primi tre anni successivi all'acquisto (cioè entro il 31/12/2026).
- Determinare la probabilità che entrambi gli hard disk si guastino *nello stesso anno* (ma *non* necessariamente entro il 31/12/2026).
- Supponiamo ora che il secondo hard disk sia di qualità inferiore rispetto al primo, per cui la sua probabilità di funzionare bene per tutto un anno è $p/2$ invece di p .

Determinare la probabilità che il secondo hard disk si guasti in un anno strettamente maggiore rispetto all'anno in cui si guasta il primo (quello di qualità superiore).

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. L'esercizio sarà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

La Scuola Sant'Anna ha deciso di costruire una grande piramide nella piazza antistante la sede principale. Si tratterà di una classica piramide a base quadrata, con quattro facce triangolari tutte uguali tra di loro. Il volume V della piramide è stato già stabilito, ma le altre dimensioni sono ancora oggetto di discussione tra tre diverse scuole di pensiero.

- (a) Un primo gruppo vorrebbe che i quattro spigoli laterali della piramide (quelli che vanno dal vertice in alto ai quattro vertici del quadrato di base) formassero angoli di 45° con il piano base.

In tale ipotesi, determinare (in funzione di V) la lunghezza del lato del quadrato di base della piramide.

- (b) Un secondo gruppo vorrebbe porre l'attenzione sulla superficie laterale S della piramide, cioè la somma delle aree dei quattro triangoli.

Determinare (in funzione di V) l'insieme dei valori possibili per S .

- (c) Un terzo gruppo, infine, sta pensando ad una piramide trasparente che contiene la suo interno una sfera colorata.

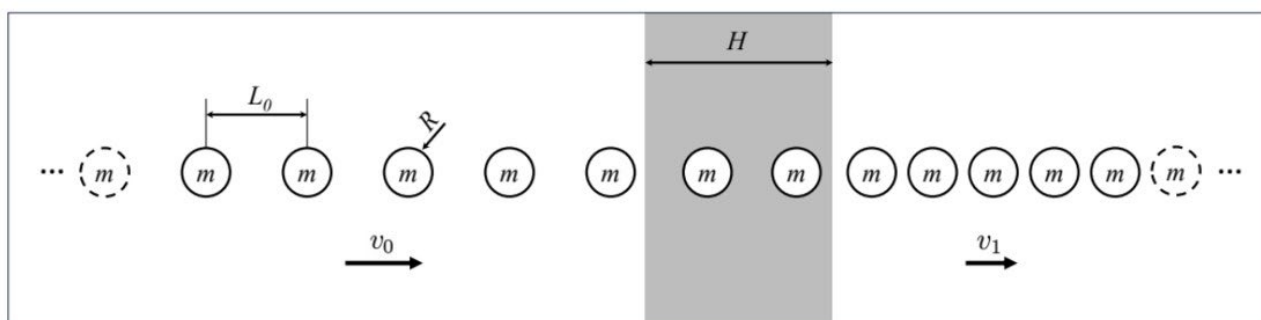
Determinare (in funzione di V) il massimo volume possibile per questa sfera interna.

PROVA SCRITTA DI INGEGNERIA

Un serie indefinita di sfere di massa m e raggio R procedono a velocità v_0 in successione su una linea retta e sono distanziate tra loro di L_0 . Le sfere penetrano in una parete di spessore H (con $H \gg R$) fatta di materiale gommoso che esercita una forza frenante su di esse tale che all'uscita dalle parete la loro velocità sia ridotta a v_1 .

Quesiti:

1. Si determini la velocità v_1 minima consentita affinché le sfere non si scontrino tra loro.
2. Nella condizione ricavata al punto 1, si determini la potenza media che viene dissipata sotto forma di calore nella parete.
3. Assumendo che la forza frenante esercitata dalla parete su ciascuna delle sfere sia costante. Si determini, in funzione del tempo, la forza che si deve esercitare sulla parete per mantenerla ferma al variare di H .



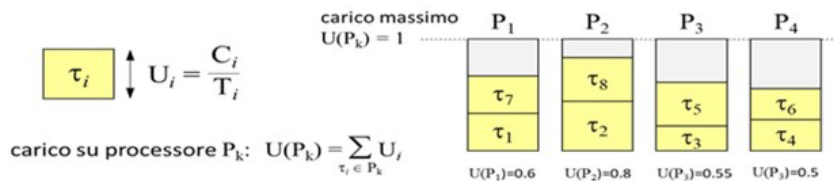
PROVA SCRITTA DI INGEGNERIA

Si consideri una piattaforma di calcolo dotata di M processori identici (P_1, P_2, \dots, P_M) in grado di eseguire un insieme di attività periodiche (task τ_1, τ_2, \dots) che vengono attivate ciclicamente a intervalli regolari. Ogni attivazione periodica è chiamata *ciclo*. Si sa che:

- Ogni task periodico è caratterizzato da un tempo di calcolo C_i del ciclo, un periodo T_i e un carico computazionale $U_i = C_i/T_i$.
 - Ogni processore P_k può eseguire più task periodici a patto che il carico totale sul processore (dato dalla somma dei carichi dei task su esso allocati, $U(P_k) = \sum_{\tau \in P_k} U_i$) non superi l'unità.
 - I task arrivano con una sequenza non nota e vengono allocati in ordine di arrivo sul processore più scarico, a patto che dopo l'allocazione il carico sul processore non superi l'unità. Se più processori hanno il carico più basso, il task viene allocato sul processore con indice minore.
 - Un task, una volta allocato, non può essere spostato su un altro processore e continua ad eseguire per infiniti cicli.
 - I task continuano ad arrivare finché un task non può essere allocato su alcun processore; in tal caso la sequenza viene interrotta e il carico del sistema è calcolato come la somma dei carichi di tutti i task allocati sugli M processori.
1. Si determini il massimo carico ottenibile sul sistema con la peggiore sequenza di arrivo possibile in un sistema con $M=4$ processori, nel caso in cui tutti i task abbiano un tempo di calcolo $C_i = 1$ ms ed un periodo T_i variabile tra 1 ms e 100 ms.
 2. Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui tutti i task abbiano un tempo di calcolo $C_i = 1$ ms ed un periodo T_i variabile tra 2 ms e 100 ms, considerando un sistema con M processori ($M \geq 1$).
 3. Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui tutti i task abbiano un tempo di calcolo $C_i = 1$ ms ed un periodo T_i variabile tra x ms e 100 ms, con $1 \leq x \leq 100$, considerando un sistema con M processori ($M \geq 1$). Il carico va espresso in funzione di x .

Esempio di sequenza di arrivo:

task(τ_i)	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8
carico(U_i)	0.3	0.45	0.2	0.25	0.35	0.25	0.3	0.35



Esempio di sequenza di arrivo e corrispondente allocazione su 4 processori.

Si noti che, un ulteriore task τ_9 con utilizzazione $U_9 = 0.6$, risulterebbe non allocabile in nessuno dei processori, terminando la sequenza con un carico totale $U = 2.45$

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. L'esercizio sarà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

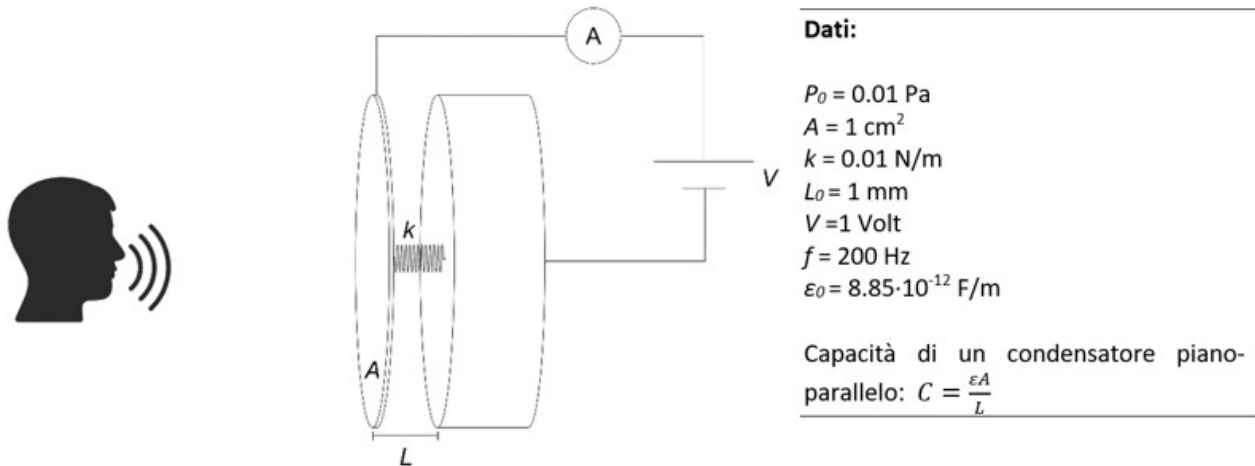
La Scuola Sant'Anna intende acquistare in data 1/1/2024 due hard disk dello stesso tipo. Ciascuno di questi hard disk funziona bene per tutto un anno con probabilità p , e di conseguenza si guasta nel corso di un anno con probabilità $1 - p$.

- (a) Determinare la probabilità che *entrambi* gli hard disk si guastino nel corso dei primi tre anni successivi all'acquisto (cioè entro il 31/12/2026).
- (b) Determinare la probabilità che entrambi gli hard disk si guastino *nello stesso anno* (ma non necessariamente entro il 31/12/2026).
- (c) Supponiamo ora che il secondo hard disk sia di qualità inferiore rispetto al primo, per cui la sua probabilità di funzionare bene per tutto un anno è $p/2$ invece di p .

Determinare la probabilità che il secondo hard disk si guasti in un anno strettamente maggiore rispetto all'anno in cui si guasta il primo (quello di qualità superiore).

PROVA SCRITTA DI INGEGNERIA

Vogliamo progettare un microfono a condensatore come in figura. Si tratta di un condensatore piano-parallelo di area A che tra le piastre ha una molla con costante di Hooke k , polarizzato a un voltaggio costante $V = 1$ Volt. Dobbiamo registrare la voce umana a 1 m di distanza, che genera fluttuazioni di pressione di ampiezza P_0 sulla piastra. Queste fluttuazioni di pressione generano spostamenti della piastra, che a sua volta generano variazioni di corrente nel circuito che vengono misurate da un amperometro. Quando la molla è a riposo in presenza del voltaggio, la distanza di equilibrio tra le piastre è L_0 .



La massa della piastra e della molla sono trascurabili, e la molla è smorzata in modo che risponde in maniera immediata alle fluttuazioni di pressione, seguendo la legge di Hooke. La resistenza dei fili di connessione è trascurabile, e la molla è elettricamente isolante.

- 1) Calcolare la carica accumulata e il campo elettrico tra le piastre in assenza di suono.
- 2) In presenza di variazioni di pressione con ampiezza P_0 , calcolare lo spostamento massimo della piastra rispetto alla condizione di equilibrio (trascurare le variazioni della forza elettrostatica nel condensatore).
- 3) Assumendo che il suono che arriva è puramente sinusoidale a una frequenza $f = 200$ Hz, rappresentare graficamente la pressione del suono e la corrente misurata in funzione del tempo (in maniera qualitativa, condividendo lo stesso asse temporale)
- 4) Calcolare la corrente massima misurata dall'amperometro indotta dal suono.
- 5) Calcolare lo scostamento dalla condizione di equilibrio se la polarizzazione del condensatore viene rimossa ($V = 0$ Volt).