PROVA AMMISSIONE ANNO ACCADEMICO 2012/2013

PROVA DI MATEMATICA

ESERCIZIO 1.

Data una circonferenza di raggio 1 ed un quadrilatero rettangolo in essa inscritta si indichi con A l'area del quadrilatero e con P il suo perimetro. Determinare i quadrilateri il cui valore di P è massimo ed i quadrilateri il cui valore di $\left(\frac{P}{4}\right)^2 - \frac{A}{2}$ è minimo.

ESERCIZIO 2.

In un aula d'esame sono seduti 10 studenti. Sotto l'ipotesi che ogni studente abbia la stessa probabilità di nascere in uno dei 12 mesi dell'anno, determinare la probabilità che tutti siano nati in un mese diverso e la probabilità che almeno due di essi siano natinello stesso mese dell'anno.

ESERCIZIO 3.

Si rappresenti nel piano cartesiano la regione definita dalla seguente disuguaglianza:

$$y^4 - 5y^2 + 6 \leq x^2\,(2 - y^2)$$

Si determini quale è la probabilità che lanciando una coppia di dadi a 6 facce si trovi una coppia di numeri che appartenga a tale regione.

ESERCIZIO 4.

In un mercato si possono acquistare e vendere in qualsiasi quantità, 3 titoli così costruiti:

- il Titolo A prevede, a seguito di un'uscita al periodo 0 di 100 euro, un'entrata al periodo 1 di 120 euro;
- il Titolo B prevede, a seguito di un'uscita al periodo 0 di 100 euro, un'entrata al periodo 2 di 140 euro;
- il Titolo C prevede, a seguito di un'uscita al periodo 1 di 100 euro, un'entrata al periodo 2 di 120 euro.

Per esempio acquistando mezza unità del Titolo A si incassano 60 euro al periodo 1 e si pagano 50 al periodo 0 mentre vendendo una unità del titolo C si incassano 100 euro al periodo 1 e si pagano 120 euro al periodo 2. Si determini se è possibile costruire una strategia di acquisti e vendite che consenta di avere flussi di cassa non negativi in ogni periodo. In caso affermativo si costruisca la strategia di acquisti e vendite che comporta un incasso di 100 euro nel periodo 0 e nessun esborso/incasso negli altri periodi.

PROVA AMMISSIONE ANNO ACCADEMICO 2013/2014

PROVA DI MATEMATICA

Risolvere, motivando le risposte, i seguenti esercizi.

ESERCIZIO 1.

Si rappresenti nel piano cartesiano l'insieme D delle coppie di numeri reali per le quali ha significato l'espressione $ln(16-(x-1)^2-(y-2)^2)+\sqrt{y^2-x^2}/\sqrt{|x+y|+x^2}$

Elencare i punti appartenenti a D con coordinate numeri interi non negativi.

ESERCIZIO 2.

Supponiamo che un produttore fabbrichi due tipi di barche: canoa e barca a remi. Le barche sono modellate da alluminio per mezzo di una macchina pressante di grandi dimensioni e sono rifinite con il lavoro a mano. Una barca a remi richiede 5 kg in alluminio, 6 min. di tempo macchina e 2 ore di finitura del lavoro; una canoa richiede 6 kg in alluminio, 5 min. di tempo macchina e 5 ore di finitura del lavoro. Per i prossimi tre mesi la società può impegnarsi per la fabbricazione di tali imbarcazioni, fino a mezza tonnellata di alluminio, 5 ore di tempo macchina e 200 ore di lavoro. L'azienda realizza un profitto di euro 50 sulla vendita di una barca a remi e un profitto di euro 60 sulla vendita di una canoa. Assumendo che ogni barca prodotta venga venduta, quante barche di ognitipo devono essere fabbricate nei prossimi 3 mesi, al fine di massimizzare i profitti?

ESERCIZIO 3.

Matilde vuole regalare una margherita di cartone alla sua mamma. Ritaglia un cerchio giallo e lo mette al centro. Poi ritaglia alcuni cerchi bianchi, dello stesso raggio del cerchio giallo, per fare i petali. Dispone i petali nel modo seguente: il primo tangente esternamente al cerchio giallo, il secondo tangente esternamente al cerchio giallo e al primo petalo, e così via fino a completare il girocon l'ultimo petalo che è tangente al penultimo, al primo petalo e al cerchio giallo. Quanti petali hala margherita?

ESERCIZIO 4.

Una lotteria non è altro che una serie di possibili pagamenti $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mutuamente esclusivi che si ottengono con certe probabilità $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ dove $p_1+p_2+\dots+p_n=1$.

Il valore atteso della lotteria si ottiene moltiplicando i pagamenti per la loro probabilità , cioè:

$$\text{valore atteso} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Oggi all'ippodromo corre Bianco contro Nero. I bookmakers quotano Bianco a 1.5 e Nero a 2. Questo significa che per ogni euro scommesso su Bianco ne vinco 1.5 se vince Bianco e nulla altrimenti e per ogni euro scommesso su Nero ne vinco 2 se vince Nero e nulla altrimenti. Si calcoli laprobabilità che, secondo i bookmakers, Bianco ha di vincere la gara, assumendo che il valore atteso di un euro scommesso su Bianco sia uguale al valore atteso di un euro scommesso su Nero. Sotto la stessa ipotesi, se scommetto parte del mio capitale su Bianco e parte su Nero, il valore atteso della vincita è superiore o inferiore al capitale scommesso?

PROVA AMMISSIONE ANNO ACCADEMICO 2014/2015

PROVA DI MATEMATICA

Risolvere, motivando le risposte, i seguenti esercizi.

ESERCIZIO 1.

Secondo i termini di un contratto, il signor XYX avrebbe dovuto pagare una somma di quasi 1 milione di euro. Dopo essersi procurato i servigi di un abile falsario, il signor XYXfece cancellare la cifra all'estrema sinistra del numero (cioè la prima cifra), facendola riportare all'estrema destra. Dopo questa modifica il debito diventa 1/4 dell'originario. A quanto ammontava il debito prima di tale manipolazione?

ESERCIZIO 2.

Tre scatole *A, B e C* contengono lampade prodotte da una certa fabbrica. Alcune di esse risultano difettose. *A* contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, *B* ne contiene 500 con il 20% difettose e *C* ne contiene 1000 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa? E se invece le scatole fossero state solo due, una coincidente con *A* ed una contenente tutte le lampadine di *B* e *C*?

ESERCIZIO 3.

Un'impresa produce due tipi di beni *A* e *B* i cui prezzi di vendita sono rispettivamente di 150 euro e 180 euro per ogni unità. Per produrre un'unità di bene *A* sono richiesti 15 minuti di utilizzo della macchina *X*, 35 minuti di utilizzo della macchina *Y* e 30 minuti di lavoro-uomo. Per il bene *B* sono invece richiesti 55 minuti di utilizzo della macchina *X*, 45minuti di utilizzo della macchina *Y* e 50 minuti di lavoro-uomo. La giornata lavorativa dell'unico operaio presente in azienda, ed il tempo per cui può rimanere attiva ciascuna delle2 macchine *X* e *Y* è di 8 ore. Dati i vincoli del problema, determinare le quantità dei beni *A* e *B* (non necessariamente intere) che bisogna produrre al giorno per massimizzare il profitto.

ESERCIZIO 4.

Sia dato nel piano un esagono regolare. Per ogni punto *P* del piano, chiamiamo *l(P)* la somma delle sei distanze tra *P* e le rette su cui giacciono i lati dell'esagono, e *v(P)* la somma delle sei distanze di *P* dai vertici dell'esagono.

1. Per quali punti *P* del piano *l(P)* è minima?
2. Per quali punti *P* del piano *v(P)* è minima?

PROVA AMMISSIONE ANNO ACCADEMICO 2015/2016

PROVA DI MATEMATICA

Motivare opportunamente ogni risposta.

ESERCIZIO 1.

Una funzione reale f si dice convessa quando, per ogni $\lambda \in [0,1]$ e ogni x_1 e x_2 nel suo dominio, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. Una funzione reale f si dice quasi-convessa quando, per ogni x_1 e x_2 nel suo dominio, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq Max\,\{f(x_1), f(x_2)\}$

a) Disegnare una funzione convessa ed una non convessa.
b) Disegnare una funzione quasi-convessa ed una non quasi-convessa.
c) Dimostrare che una funzione convessa è anche quasi-convessa.
d) Disegnare una funzione quasi-convessa ma non convessa.

ESERCIZIO 2.

Mario e Anna giocano con un dado a sei facce. Si accorgono che la faccia con il numero 1 esce con più frequenza delle altre cinque (queste ultime risultano invece equiprobabili). Decidono quindi che quando esce la faccia con il numero 1 tale tiro non sia valido e si debba effettuare un nuovo lancio. Supponendo che i due giocatori continuino a giocare fino ad ottenere due lanci validi consecutivi si calcoli:

a) la probabilità che la somma dei valori degli ultimi due lanci sia 8;
b) la probabilità che il valore assoluto della differenza tra i valori degli ultimi due lanci sia uguale alla loro media aritmetica.

ESERCIZIO 3.

Sia x_t il valore in euro di un investimento al periodo t. In ogni periodo il valore diminuito di 50 euro è pari alla metà del valore del periodo precedente.

a) Scrivere l'equazione che esprime il valore investito in t in funzione del valore investito in t-1. Ipotizzando che il valore iniziale x_0 sia pari a 20 euro, si trovi il valore dell'investimento al periodo t=3.
b) Scrivere l'equazione che esprime il valore investito in t in funzione del valore iniziale x_0.
c) Calcolare il valore dell'investimento per t che tende all'infinito. (può essere utile sapere che per $x \in (0,1)$ la somma infinita $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ha valore $1/(1-x)$)
d) Quanto si deve investire in $t = 0$ affinché la somma iniziale rimanga invariata nel tempo?

ESERCIZIO 4

a) Data una circonferenza si dimostri che l'angolo al centro è doppio di un generico angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.
b) Dato per noto il teorema di cui al punto *a*), si dimostri che gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono tutti uguali.
c) Quanto vale l'angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza?

Seconda prova scritta - 5 settembre 2016

Traccia di matematica

Il candidato svolga quattro dei cinque esercizi.

Esercizio A

Si consideri la funzione reale

$$f(x) = ax^3 + bx + c.$$

a) Fissati i valori $a = -1$, $b = 3$, $c = 2$, rappresentare il grafico di f nel piano cartesiano.

b) Determinare i valori di a, b e c tali che l'equazione

$$f(1 - x) = f(x - 1)$$

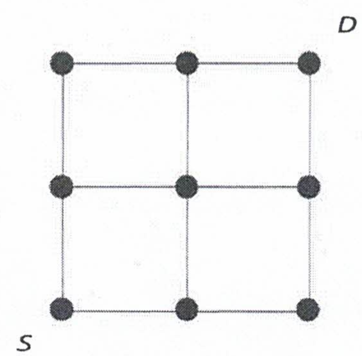
sia soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$.

c) Fissati i valori $a = b = c = 1$, individuare le eventuali soluzioni dell'equazione

$$f(e^x) = -1.$$

Esercizio B

Si consideri una rete informatica composta da 9 computer, uniti da 12 cavi disposti come in figura. Due computer sono connessi se c'è almeno un percorso (successione di un qualsiasi numero di cavi adiacenti) che porta dall'uno all'altro. Qual'è la probabilità di disconnettere il computer S dal computer D:



a) tranciando due cavi a caso?

b) tranciando tre cavi a caso?

c) tranciando quattro cavi a caso?

Esercizio C

Sia data una retta r e due punti A e B disposti al di fuori di r. Siano A' e B' i punti sulla retta più vicini rispettivamente ad A e B, e P il punto sulla retta che minimizza la somma delle distanze $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$. Dimostrare che i triangoli $AA'P$ e $BB'P$ sono simili.

Esercizio D

Una stessa tipologia di bene (ad esempio tè freddo) viene prodotto da 2 imprese rivali A e B. Ognuna di esse sa che il prezzo p a cui verrà venduto il bene prodotto dipenderà dalle quantità prodotte complessivamente sul mercato ed è descritto dalla seguente funzione di domanda

$$p = \max(0, 10 - q_A - q_B)$$

dove $q_A \geq 0$ e $q_B \geq 0$ sono rispettivamente le quantità prodotte dall'impresa A e dall'impresa B. Se ad esempio A produce $\sqrt{2}$ unità di bene e B produce 9 unità di bene, il prezzo che si realizza sul mercato è 0. Se invece l'impresa A produce $\sqrt{2}$ unità di bene e B produce 5 unità di bene, il prezzo che si realizza sul mercato è $5 - \sqrt{2}$. Per produrre una quantità q_A l'impresa A subisce un costo totale pari a $3q_A$; per produrre una quantità q_B l'impresa B subisce un costo totale pari a $3q_B$. Ciascuna impresa può decidere solo la propria quantità prodotta. Determinare, al variare della quantità prodotta dal concorrente, quale è la quantità ottima che all'impresa conviene produrre per rendere massimo il proprio profitto. Vi è un punto (q_A, q_B) in cui contemporaneamente le 2 imprese massimizzano i propri profitti, date le decisioni dell'impresa rivale?

Esercizio E

Si consideri la funzione in due variabili $g(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$.

a) Disegnare il luogo dei punti tale che $g(x_1, x_2) = a$, per $a = -1$, $a = 0$ e $a = 1$.

b) Una funzione f in due variabili si definisce omogenea di grado k se

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2) = \alpha^k(x_1, x_2)$$

per ogni x_1, y_2 appartenenti a R. Stabilire se esite un k tale che la funzione g sia omogenea di grado k.

Traccia di filosofia

Natura e tecnica nella filosofia tra Ottocento e Novecento

Traccia di storia

Una transizione difficile. Economia, società, istituzioni nel Mezzogiorno d'Italia dal Regno delle Due Sicilie alla Repubblica.

Seconda prova scritta - 5 settembre 2017

Traccia di matematica

Il candidato svolga quattro dei cinque esercizi.

Esercizio A

Si consideri la funzione reale

$$f(x) = ax^3 + bx + c.$$

a) Fissati i valori $a = -1$, $b = 3$, $c = 2$, rappresentare il grafico di f nel piano cartesiano.

b) Determinare i valori di a, b e c tali che l'equazione

$$f(1-x) = f(x-1)$$

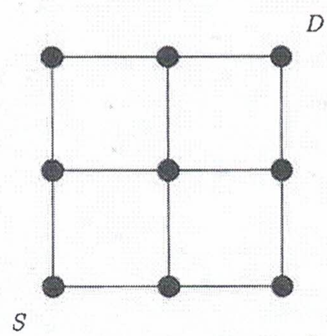
sia soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$.

c) Fissati i valori $a = b = c = 1$, individuare le eventuali soluzioni dell'equazione

$$f(e^x) = -1.$$

Esercizio B

Si consideri una rete informatica composta da 9 computer, uniti da 12 cavi disposti come in figura. Due computer sono connessi se c'è almeno un percorso (successione di un qualsiasi numero di cavi adiacenti) che porta dall'uno all'altro. Qual'è la probabilità di disconnettere il computer S dal computer D:



a) tranciando due cavi a caso?

b) tranciando tre cavi a caso?

c) tranciando quattro cavi a caso?

Esercizio C

Sia data una retta r e due punti A e B disposti al di fuori di r. Siano A' e B' i punti sulla retta più vicini rispettivamente ad A e B, e P il punto sulla retta che minimizza la somma delle distanze $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$. Dimostrare che i triangoli $AA'P$ e $BB'P$ sono simili.

Esercizio D

Una stessa tipologia di bene (ad esempio tè freddo) viene prodotto da 2 imprese rivali A e B. Ognuna di esse sa che il prezzo p a cui verrà venduto il bene prodotto dipenderà dalle quantità prodotte complessivamente sul mercato ed è descritto dalla seguente funzione di domanda

$$p = \max(0, 10 - q_A - q_B)$$

dove $q_A \geq 0$ e $q_B \geq 0$ sono rispettivamente le quantità prodotte dall'impresa A e dall'impresa B. Se ad esempio A produce $\sqrt{2}$ unità di bene e B produce 9 unità di bene, il prezzo che si realizza sul mercato è 0. Se invece l'impresa A produce $\sqrt{2}$ unità di bene e B produce 5 unità di bene, il prezzo che si realizza sul mercato è $5 - \sqrt{2}$. Per produrre una quantità q_A l'impresa A subisce un costo totale pari a $3q_A$; per produrre una quantità q_B l'impresa B subisce un costo totale pari a $3q_B$. Ciascuna impresa può decidere solo la propria quantità prodotta. Determinare, al variare della quantità prodotta dal concorrente, quale è la quantità ottima che all'impresa conviene produrre per rendere massimo il proprio profitto. Vi è un punto (q_A, q_B) in cui contemporaneamente le 2 imprese massimizzano i propri profitti, date le decisioni dell'impresa rivale?

Esercizio E

Si consideri la funzione in due variabili $g(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$.

a) Disegnare il luogo dei punti tale che $g(x_1, x_2) = a$, per $a = -1$, $a = 0$ e $a = 1$.

b) Una funzione f in due variabili si definisce omogenea di grado k se

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2) = \alpha^k (x_1, x_2)$$

per ogni x_1, y_2 appartenenti a $\mathbb{R}$. Stabilire se esite un k tale che la funzione g sia omogenea di grado k.

Traccia di filosofia

Natura e tecnica nella filosofia tra Ottocento e Novecento

Traccia di storia

Una transizione difficile. Economia, società, istituzioni nel Mezzogiorno d'Italia dal Regno delle Due Sicilie alla Repubblica.

Seconda prova scritta - 29 agosto 2018

Traccia di matematica

Il candidato svolga quattro dei cinque esercizi.

Esercizio A

Si consideri un parallelogramma ABCD ed i triangoli equilateri AEB e BFC giacenti esternamente su due lati consecutivi dello stesso.

a) Dimostrare che il triangolo DEF è equilatero.

b) Trovare, se esiste, l'angolo BAD per cui viene minimizzato il rapporto tra 1) la somma delle aree dei due triangoli AEB e BFC e 2) l'area del parallelogramma ABCD.

c) Trovare, se esiste, il valore minimo che tale rapporto assume al variare degli angoli e dei lati del parallelogramma.

Esercizio B

Dato n numero intero positivo, sia $X_n = n^3 + 2n$.

a) Dimostrare che X_n è multiplo di 3 per ogni n.

b) Dimostrare che esistono infiniti valori di n per cui X_n non è multiplo né di 26 né di 34.

Esercizio C

Il manager dell'impresa Moulinell deve decidere se produrre o meno un modello di frullatore che farebbe competizione ad un modello attualmente prodotto dall'impresa Braus.

- Se decide di non produrlo, la Moulinell non otterrà alcun guadagno e la Braus guadagnerà 10 milioni.

- Se invece lo produce, l'impresa Braus dovrà a sua volta decidere se ritirare la produzione del proprio, concedendo un profitto di 11 milioni di euro alla Moulinell e non guadagnando nulla, oppure mantenerlo.

- In questo ultimo caso, la Moulinell potrà poi decidere se fissare un prezzo maggiore a quello della Braun (nel qual caso la Moulinell perderà 2 milioni e la Braus ne guadagnerà 8), uguale (nel qual caso sia la Moulinell che la Braus ne guadagneranno 3) o minore (nel qual caso la Moulinell guadagnerà 6 milioni e la Braus ne perderà 3).

Le tre scelte sono fatte in sequenza: ognuna delle due aziende osserva le scelte precedenti, ma non comunica con l'altra.

Stabilire se al manager della Moulinell convenga o meno produrre il nuovo frullatore, a seconda che il suo obiettivo sia:

- garantire alla propria azienda il profitto più alto possibile,

- garantire il profitto minore possibile alla Braus,

- garantire il profitto *totale* per le due aziende più alto possibile.

Esercizio D

Alberto e Bernardo si trovano davanti a tre scatole chiuse su un tavolo. Sanno che dentro alle scatole ci sono tre nomi "Alberto", "Bernardo" e "Carla" – ogni nome dentro ad una scatola. Ma nessuno dei due conosce l'abbinamento tra scatole e nomi. Ognuno dei due, cominciando da Alberto, deve scegliere una scatola da aprire (tra quelle ancora chiuse): vince se apre quella con il proprio nome, altrimenti perde.

a) Che probabilità ha Bernardo di vincere?

b) Che probabilità ha Bernardo di vincere se invece Alberto sa dove stanno i nomi (ma non può comunicarlo a Bernardo)?

c) In preda ad un'allucinazione, Bernardo sostiene di vedere il suo nome dentro ad una delle tre scatole chiuse, e la prende in mano, senza aprirla. Alberto sa dove stanno i nomi e vuole, se possibile, aiutare Bernardo, ma è costretto a scegliere tra le scatole rimaste sul tavolo. Dopo che Alberto ha aperto una scatola, Bernardo rinsavisce e si rende conto che la sua era solo un'allucinazione, e non sa se aprire la scatola che aveva preso, o l'altra rimasta chiusa. Cosa conviene fare a Bernardo, e che probabilità avrà di vincere?

Esercizio E

Sia $f : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ la seguente funzione

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 2x_2, 1 - x_1 + 2x_2 - x_3)\ ,$$

con x_1, x_2 e x_3 tre numeri reali. Essa può essere pensata come una trasformazione dello spazio perché trasforma punti in punti.

a) Calcolare l'immagine del punto $(3, 2, 1)$.

b) Determinare l'insieme dei punti (x_1, x_2, x_3) tali che $f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$.

c) Determinare l'insieme dei punti (x_1, x_2, x_3) tali che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$.

d) Determinare l'insieme dei punti (x_1, x_2, x_3) tali che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 1 - x_3)$.

Traccia di filosofia

Rivoluzione, progresso, dialettica. Filosofie del cambiamento storico nell'età moderna e contemporanea.

Traccia di storia

Il "grande malato d'Europa". La disgregazione dell'Impero Ottomano tra nazionalismi e imperialismo.

Seconda Prova Scritta - 01 Settembre 2020
Traccia di Matematica

Esercizio 1. In una classe di 30 persone si devono formare 3 gruppi di lavoro per affrontare dei lavori di approfondimento sul calcolo combinatorio. Trovare quanti gruppi si possono formare nell'ipotesi che
a) I gruppi siano formati da 10 persone;
b) Il primo gruppo sia formato da 7 persone, il secondo da 10, il terzo da 13.

Esercizio 2. Si consideri un test diagnostico per una malattia infettiva che dà una risposta positiva (malato), quando l'individuo è realmente affetto dalla malattia, nel 99.5% dei casi, mentre per un soggetto sano il test dà risposta negativa (sano) nel 99.8% dei casi. Dai dati raccolti sulla malattia, si sa che, nella popolazione di riferimento, un paziente su cento ha contratto tale malattia. Si trovi la probabilità che un individuo abbia la malattia nell'ipotesi che il suo test dia esito positivo.

Esercizio 3. Si consideri una funzione $f : \Re \to \Re$, dove $\Re$ rappresenta l'insieme dei numeri reali, per cui vale la seguente proprietà

$$f(x_1^2 - x_2^2) = x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2) \tag{1}$$

a) Si dica se la funzione $f(x) = x^2$ verifica tale proprietà;
b) Si dica se la funzione $f(x) = ax$ con $a \in \Re$ verifica tale proprietà;
c) Calcolare $f(0)$;
d) Verificare che la funzione è dispari (cioè $f(x) = -f(-x)$) (Può essere d'aiuto considerare l' espressione di $f(x_1^2)$).

Esercizio 4. a) Un allevatore di conigli si chiede quante coppie di conigli si possono ottenere in un anno, a partire da una unica coppia, nell'ipotesi che ogni mese ciascuna coppia con due o più mesi di vita, dia alla luce una nuova coppia. Per semplicità, si suppone che:
- nessuna coppia muoia;
- la prima coppia sia costituita da conigli appena nati;
- il tempo di gestazione sia di un mese;
- la maturità sessuale sia raggiunta dopo il primo mese di vita.

b) Verificare che tale successione di numeri puo' essere generata dalla seguente equazione ricorsiva

$$x_{t+1} = x_t + x_{t-1} \tag{2}$$

con $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, dove il pedice di x rappresenta il numero del mese (0 equivale al mese precedente a quello in cui la prima coppia è stata inserita nel recinto). Fornire una motivazione a tale fatto;

Continua sul retro del foglio

c) Verificare che la funzione $x_t = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t\right)$ risolve (2);

d) Calcolare $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t}$.

Esercizio 5. Sia $\overset{\triangle}{ABC}$ un triangolo avente $\overline{BC} = 2\overline{AB}$. Si considerino i punti D ed E punti medi di $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$, rispettivamente. Si provi che $\overline{AD}$ è bisettrice di $C\hat{A}E$.

AnGM

Seconda Prova Scritta - 31 Agosto 2021
Traccia di Matematica

Si svolgano gli Esercizi 1, 2 e 3, più uno (e soltanto uno) a scelta tra l'Esercizio 4.A e l'Esercizio 4.B.

Esercizio 1. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

specificandone in particolare:

(a) il campo di esistenza e il segno;
(b) i limiti agli estremi del campo di esistenza e gli eventuali asintoti;
(c) la derivata prima e gli intervalli di crescenza e decrescenza;
(d) il grafico e i punti di massimo/minimo relativi/assoluti.
(e) Dal grafico ottenuto al punto (d), dedurre il grafico della funzione $\log(f(x))$.

Esercizio 2.
(a) Si calcoli la probabilità che 2 individui selezionati a caso in un gruppo di 30 persone festeggino il compleanno nello stesso giorno;
(b) Si calcoli la probabilità che 2 individui selezionati a caso in un gruppo di 30 persone festeggino il compleanno nello stesso mese.

Nello svolgimento dell'esercizio, si assuma che l'anno sia composto da 360 *giorni,* 12 *mesi, e che ogni mese sia composto da* 30 *giorni.*

Esercizio 3.
(a) Data la funzione $f(x) = x^2 + 3x$, dove x varia nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ (cioè $\{0, 1, 2, 3...\}$), determinarne tre elementi del codominio.
(b) Individuare una funzione g definita su $\mathbb{N}$ che permette di ottenere:

(b1) tutti e soli i numeri naturali pari;
(b2) tutti e soli i numeri naturali dispari;
(b3) tutti i numeri interi (cioè $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...\}$).

Esercizio 4.A. Si consideri un triangolo equilatero i cui lati misurano l. Si determini l'area della circonferenza inscritta a tale triangolo.

Esercizio 4.B.
Un gestore telefonico offre due differenti contratti relativi al traffico internet, denominati $O1$ e $O2$.

$O1$ include 10 Giga al prezzo di 5 euro e il pagamento di 1 euro per ogni Giga aggiuntivo consumato;

$O2$ include 20 Giga al prezzo di 8 euro e il pagamento di 2 euro per ogni Giga aggiuntivo consumato.

Determinare per quali valori di consumo di Giga è preferibile l'offerta $O1$ rispetto ad $O2$ (si consideri che il consumo di Giga possa assumere qualsiasi valore positivo).

Seconda Prova Scritta - 29 Luglio 2022
Traccia di Matematica

Svolgere i seguenti quattro esercizi, giustificandone adeguatamente i passaggi.

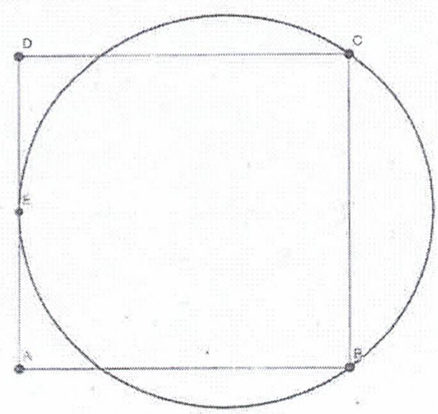
Esercizio 1. Dimostrare la seguente disuguaglianza

$$\ln(1+x) > x - x^2$$

per ogni $x > 0$.

Esercizio 2.
Un sacchetto contiene una biglia di cui non conosciamo il colore. Essa può essere gialla o rossa (e di nessun altro colore), con medesima probabilità. Esternamente all'urna si trova una biglia di colore giallo delle stesse dimensioni e peso della biglia inserita nell'urna. La biglia esterna viene inserita nell'urna. Estraendo a caso dal sacchetto una delle 2 biglie si ottiene una biglia gialla. Quale è la probabilità che la palla rimasta all'interno del sacchetto sia rossa?

Esercizio 3.
Si considerino il quadrato e la circonferenza così come rappresentate qui di seguito (un lato del quadrato è tangente alla circonferenza). Quale delle 2 figure geometriche ha area maggiore?



Continua sul retro del foglio

Esercizio 4. Il piano produttivo per il 2023 di un calzaturificio prevede una produzione per ciascun mese di un livello $p_t \geq 0$ con $t = 1, .., 12$ (quindi nel mese uno si dovrà produrre p_1, nel mese 2 dovrà produrre p_2 e così via). Ciascun operaio è in grado di produrre al massimo k unità di prodotto in un mese. Lo stipendio mensile di ciascun operaio è pari a s. Supponiamo che si possa assumere e licenziare soltanto il primo giorno di ogni mese. Assumere e licenziare personale ha dei costi, e precisamente: assumere un operaio costa a, mentre licenziarne uno costa l. Al 31-12-2022 il numero di operai disponibili sarà n_0. Scrivere, senza risolvere, il problema che ha come obiettivo quello di decidere il numero di operai che devono essere presenti durante ciascun mese in modo da riuscire sempre a produrre la quantità prevista nel piano e finalizzato a minimizzare i costi complessivi, comprensivi quindi dello stipendio, del costo di assunzione, del costo di licenziamento.
Suggerimento: indicare con n_t il numero di lavoratori presenti all'epoca t (il numero di operai a gennaio è quindi n_1). Il numero di operai all'epoca $t + 1$ è pari a...