Scuola Superiore di Studi Universitari e di Perfezionamento S. Anna

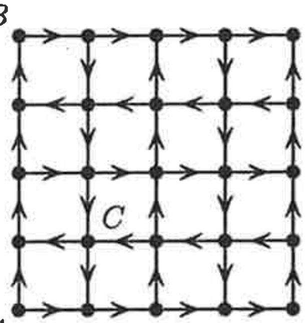
Concorso di ammissione al I anno

Prova scritta di Matematica

Pisa, 26 luglio 2022

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati.
Ogni esercizio sarà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Esercizio 1. Nel 1997 gli allievi del Settore di Ingegneria della Scuola Samt'Anna si recano in viaggio di istruzione a New York City. Thomas, il più estroso del gruppo, ispirandosi alla geometria ed alla viabilità locali, introduce il concetto di n-Manhattan, cioè di una città che si può schematizzare come un reticolo costituito da $2n$ strade, di cui n in direzione Nord-Sud ed n in direzione Est-Ovest, che si incontrano formando n^2 incroci. Tutte le strade sono a senso unico in maniera alternata. Ad esempio, nella figura seguente è rappresentata una 5-Manhattan.



Diciamo che il *costo* per andare da un incrocio X ad un incrocio Y è k se il percorso più corto che va da X a Y rispettando i sensi unici attraversa k tratti del reticolo. Ad esempio, nella figura il costo per andare da B a C è 4, e anche il costo per andare da A a C è 4.

(a) Siano X e Y due incroci in una 1000-Manhattan, lontani dal perimetro esterno. Sappiamo che il costo per andare da X a Y è 10.

Determinare quanto vale al massimo il costo per andare da Y a X.

(b) Consideriamo, in una 1000-Manhattan, l'incrocio A posto in un vertice del perimetro esterno da cui partono due strade (come nel vertice in basso a sinistra nella figura).

Determinare quanti sono gli incroci raggiungibili a partire da A con un costo minore o uguale di 999.

(c) Consideriamo, in una 1000-Manhattan, un incrocio B posto in un vertice del perimetro esterno da cui parte esattamente una strada (come nel vertice in alto a sinistra nella figura).

Determinare quanti sono gli incroci raggiungibili a partire da B con un costo minore o uguale di 999.

Esercizio 2 Il Marathon Club Sant'Anna ha 100 iscritti, più il Presidente Antonio. Tutte le settimane, i componenti ed il Presidente si ritrovano per un allenamento di gruppo lungo un percorso della lunghezza di 10 km.

(a) Nel periodo iniziale della pandemia, per evitare assembramenti, i componenti del gruppo hanno deciso di effettuare l'allenamento partendo singolarmente a un minuto di distanza l'uno dall'altro, e di procedere tutti con lo stesso passo costante di 5:00 al km, in modo da non incontrarsi. Antonio, invece, alieno alle regole, è partito in un momento a caso tra il 30-esimo e il 31-esimo, ed ha corso ad un passo costante ma diverso dagli altri.

Sapendo che Antonio ha effettuato 6 sorpassi nei 10 km, cosa possiamo dire del suo passo?

(b) Dopo due mesi, con il diminuire delle restrizioni, i concorrenti hanno confermato le partenze singole distanziate di un minuto, ma hanno deciso che ognuno potesse scegliere se procedere con il passo costante di 4:50, 5:10 o 5:30 al km. Supponendo che ognuno abbia scelto con uguale probabilità tra le tre opzioni, indipendentemente dalle scelte altrui, determinare la probabilità che il concorrente partito per 30-esimo abbia effettuato e subito lo stesso numero di sorpassi.

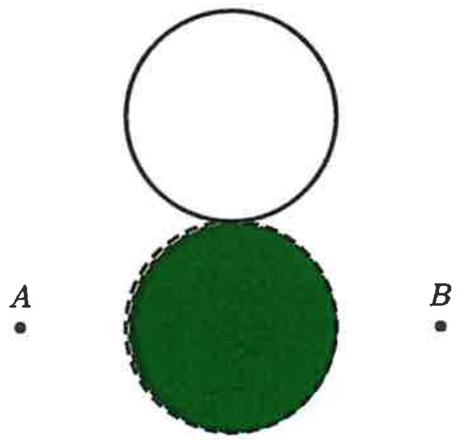
(c) All'ultimo allenamento, grazie all'ulteriore allentamento delle restrizioni, i componenti del gruppo hanno deciso di partire a coppie, sempre a distanza di un minuto dalla coppia precedente. In ogni coppia, uno correva al passo costante di 5:00 al km e uno al passo costante di 5:20 al km. Ancora una volta Antonio non ha rispettato la regola, partendo in un momento a caso tra il 30-esimo e il 31-esimo gruppo, e tenendo un passo costante diverso dagli altri. A fine allenamento, Antonio ha dichiarato: "ho effettuato 1 sorpasso e ne ho subiti 2, ma se fossi partito 5 secondi dopo avrei effettuato 2 sorpassi e ne avrei subiti 2".

Cosa possiamo dire del passo che ha tenuto Antonio?

Nota. Si intende che i sorpassi effettuati sulla linea di partenza/arrivo non si contano. Il passo di un corridore è di 5:27 al km se il corridore impiega 5 minuti e 27 secondi per percorrere 1 km.

Esercizio 3. Nella figura seguente il punto A ha coordinate $(-2,0)$, il punto B ha coordinate $(2,0)$, il cerchio colorato è centrato nell'origine ed ha raggio 1, il cerchio bianco è centrato nel punto $(0,2)$ ed ha raggio 1. Il costo per percorrere un'unita di lunghezza è uguale a

- α se si è nel cerchio bianco (incluso il bordo);
- β se si è nel cerchio colorato (escluso il bordo);
- 1 in tutto il resto del piano.



Determinare il percorso che unisce il punto A al punto B con il minimo costo totale

(a) nel caso $\alpha = 0$ e $\beta = 1$,

(b) nel caso $\alpha = 1$ e $\beta = 2$,

(c) nel caso $\alpha = 1$, in funzione del parametro $\beta \geq 0$ variabile.

SCUOLA SUPERIORE DI STUDI UNIVERSITARI SANT'ANNA

Concorso di ammissione al I anno
Prova scritta di Fisica e Problem Solving
27/07/2022

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.
Ognuno dei 3 esercizi deve essere svolto su un foglio protocollo distinto.
Si ricorda di usare per la scrittura solamente ed esclusivamente la penna fornita in dotazione dalla commissione.

Esercizio 1. Il sistema di sollevamento sottomarino
Una nave deve recuperare, tramite argano e cavo, un carico affondato in un lago.
Quesiti:

1. Si calcoli il lavoro per portare il carico in superficie con il solo utilizzo di argano e cavo;
2. Si calcoli la quantità di elio (moli) con cui gonfiare dei palloni collegati al carico e ad esso vicini, in modo tale da limitare la trazione massima del cavo ad un determinato valore di sicurezza ;
3. Si calcoli il lavoro compiuto dall'argano per portare il carico in superficie con l'aiuto di palloni gonfiati con elio come al punto precedente, sia nel caso che il materiale di cui è costituita la loro membrana sia inestensibile e il loro volume sia sempre lo stesso, che nel caso in cui la membrana sia estensibile e il volume possa variare.

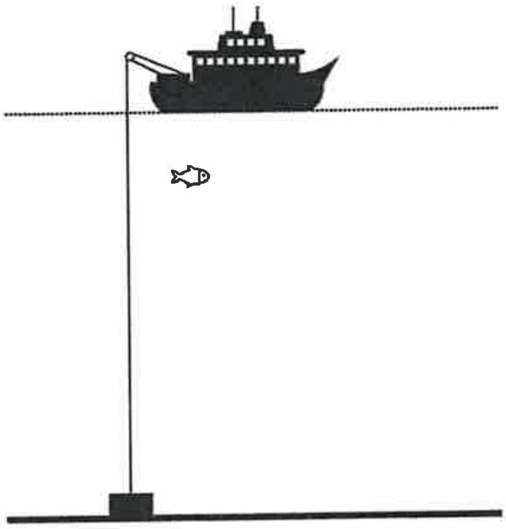


FIGURA 1. Illustrazione del problema 1

Dati:

- Profondità del lago nel luogo dove giace il carico: $35\,m$
- Massa del carico affondato: $9.000\,kg$
- Densità del carico: $3.000\,kg/m^3$
- Densità lineare del cavo: $10\,kg/m$

- Valore di sicurezza per la trazione del cavo: $5.000\,kg$
- Densità del materiale dei palloni: uguale alla densità dell'acqua
- Densità dell'acqua: $1.000\,kg/m^3$
- Massa molare dell'elio: $0,004\,kg/mol$
- Costante del gas per l'equazione di stato: $8,314\,J/(mol \cdot K)$
- Temperatura dell'acqua: $283\,K$
- Pressione atmosferica: $101.325\,Pa$
- Accelerazione di gravità: $9,81\,m/s^2$

Ipotesi di lavoro

- Il movimento dell'argano è lento, tale da trascurare energia cinetica e attriti con l'acqua
- Si considera trascurabile la distanza tra l'argano e la superficie dell'acqua
- Si considerano trascurabili la dimensione trasversale e il volume immerso del cavo
- Si trascura la reazione elastica dei palloni estensibili: essa pertanto non contribuisce alla pressione interna ai palloni stessi
- La densità degli elementi di collegamento tra palloni e carico è uguale a quella dell'acqua

NOTE: Per tutti i punti dell'esercizio si trascuri l'effetto di eventuali attriti dinamici e fluidodinamici

Esercizio 2. Questione di cariche

Si considerino delle cariche elettriche puntiformi disposte nelle seguenti configurazioni di figura:

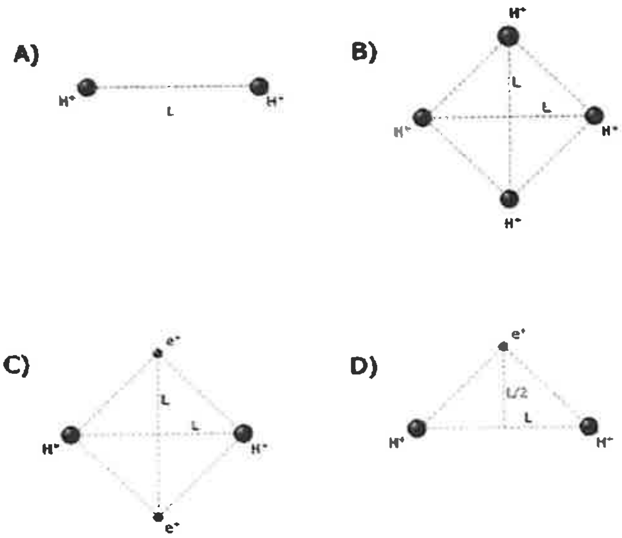


FIGURA 2. Le disposizioni di carica

A) Due protoni fissi a una distanza L.
B) Quattro protoni disposti lungo i vertici di un quadrato la cui diagonale misuri L.
C) Due protoni e due positroni disposti ai vertici di un quadrato la cui diagonale misuri L come mostrato nella figura.
D) Due protoni ed un solo positrone disposti come nel punto D), dove è stato rimosso il positrone inferiore rispetto al caso C) di figura.

Quando le cariche vengono lasciate libere di muoversi, si muoveranno respingendosi fino a raggiungere una velocità limite. Si calcoli e si rappresenti graficamente tale velocità limite per ciascuna particella in tutti i 4 casi elencati.

Per i casi C) e D), il calcolo della velocità viene richiesto in modo approssimato.

Dati:

- L $= 1\,cm$
- Carica protone $q_p =$ carica positrone $q_e = 1,6010^{-19}C$
- Massa protone: $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}kg$
- Massa positrone: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}kg$
- Costante di Coulomb: $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9,0 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$

Nota: Si trascurino eventuali effetti gravitazionali, relativistici, magnetici, etc.

Esercizio 3. Il superorganismo.

Studi recenti evidenziano come le colonie di formiche, nel trasportare risorse alimentari di grandi dimensioni al proprio nido, si comportano in modo collettivo come le cellule di un unico organismo, un "superorganismo", grazie ad un meccanismo che può ricordare le funzioni del sistema nervoso centrale umano.

Nel comportamento collettivo a superorganismo, la formica informata, ossia quella più vicina al nido, prova a tirare il cibo verso il nido, attratta dall'odore dello stesso, tramite un meccanismo sensoriale basato su feromoni. Più la formica è vicina al nido, più la densità di feromoni è alta. Gli altri membri della colonia che accerchiano il cibo tirano e spingono in maniera casuale lo stesso, e solo quando riescono a sincronizzarsi con la formica informata, permettono al superorganismo di compiere un passo verso il nido. Il trasporto collettivo di cibo verso il nido avviene quindi solamente quando tutti i movimenti delle formiche avvengono nella stessa direzione (ossia verso il nido). Negli altri casi, il cibo e le formiche rimangono fermi. Un esempio di trasporto collettivo è mostrato in FIGURA 3.

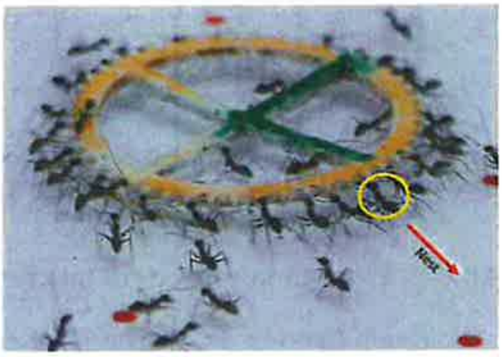


FIGURA 3. Esempio di trasporto collettivo. In giallo, la formica informata tira il pezzo di cibo verso il nido (nest).

Ad un gruppo di studenti/esse di ingegneria viene chiesto di scrivere un programma che simuli il comportamento a superorganismo assumendo che i movimenti avvengano solo sul piano cartesiano xy. Si riporta in FIGURA 4 un esempio con la disposizione del cibo, delle formiche e del nido. Si assuma che i movimenti delle formiche siano sempre permessi, a prescindere dalla dimensione e massa del cibo.

Nello specifico, si assuma che ogni formica possa compiere, in un delta temporale Δt, un movimento unitario scegliendo fra 8 direzioni diverse, come in FIGURA 5.

Quesiti:

1. Sapendo che la formica informata ha a disposizione un sistema olfattivo che le permette di percepire, ad ogni istante t, il valore di feromone sia nella sua posizione che nelle 8 adiacenti, come da figura 5, scrivere una procedura calcola_pos_des(x_inf, y_inf) che calcoli la posizione che la formica informata vorrebbe assumere all'istante t+1, conoscendo la sua posizione (x_inf, y_inf) all'istante t.
2. Si scriva la procedura movimento_formica che calcoli, ad ogni istante temporale t, la posizione che una formica non informata vorrebbe assumere, considerando nota la sua posizione (x_noinf, y_noinf) al tempo t.

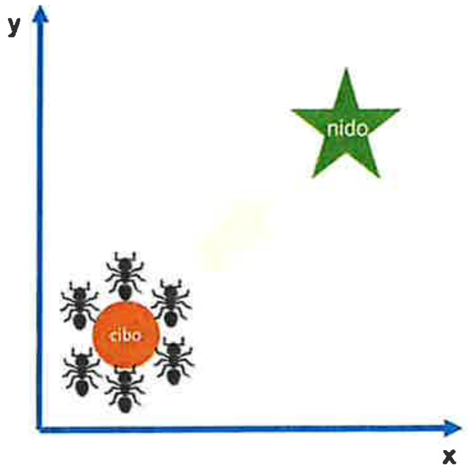


FIGURA 4. Schema delle formiche che circondano il cibo e cercano di portarlo verso il nido. La freccia gialla indica il movimento che il superorganismo deve compiere per raggiungere il nido.

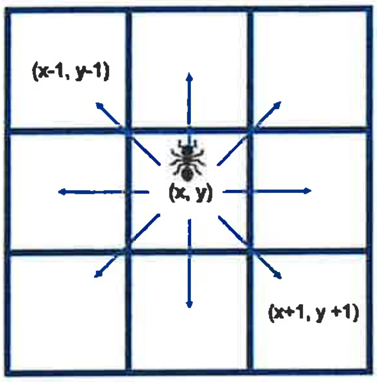


FIGURA 5. Possibili movimenti di una formica.

3. Considerando che la colonia sia formata da 5 formiche oltre alla informata, scrivere una procedura sposta_cibo che calcoli la nuova posizione del cibo all'istante t+1, conoscendo la sua posizione all'istante t.

Per le descrizioni richieste, si possono utilizzare le seguenti funzioni già definite:

- **val_fer= senti_feromone(a,b)**: restituisce il livello di feromone (val_fer) nella posizione (a,b) come percepito dalla formica informata
- **m = rnd()**: (abbreviazione del termine random ovvero casuale) permette di generare un numero intero casuale (m) tra 1 e 100, compresi.
- **m = round(n)**: calcola il numero intero (m) più vicino ad n

Durante lo svolgimento si discutano le scelte implementative.