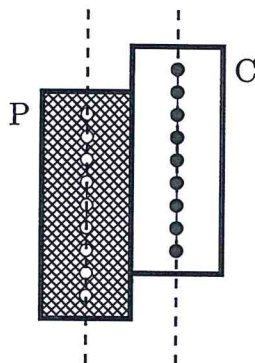


SCUOLA SUPERIORE DI STUDI UNIVERSITARI  
E DI PERFEZIONAMENTO SANT'ANNA

CONCORSO DI AMMISSIONE AL I ANNO - PROVA SCRITTA DI MATEMATICA  
1 SETTEMBRE 2016

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

**Esercizio 1.** Una rastrelliera di prese è costituita da una base di plastica rettangolare molto lunga e di larghezza  $l$ . Al centro della base sono fissate  $n$  prese a distanza  $h$  l'una dall'altra. Una rastrelliera di prese  $P$  ed una di carichi  $C$  vengono fissate, longitudinalmente e mediante una guida che corrisponde al loro asse, a due binari che distano  $l$  tra loro e lasciate libere di scorrere verticalmente.



Si desidera connettere tutte le prese della rastrelliera  $C$  dei carichi ad alcune (non necessariamente tutte) di quelle della rastrelliera  $P$  tenendo conto dei seguenti fattori:

- (a) il filo per le connessioni costa  $\beta$  per unità di lunghezza;
- (b) ciascuna presa di  $P$  sopporta al massimo il carico di 2 prese di  $C$ ;
- (c) uno sdoppiatore è puntiforme, non costa niente e può essere inserito in qualsiasi punto del cavo di connessione;
- (d) connettersi ad una presa di  $P$  costa  $\alpha = \beta/3$ .

1. Per  $n$  pari, si decida, al variare di  $l$ ,  $h$ ,  $\beta$  quali sono le configurazioni di connessione più economiche.
2. Si analizzi, in modo qualitativo se non fosse possibile calcolare con esattezza le soglie, il caso  $n$  dispari.

**Esercizio 2.** Si desidera coprire completamente un cerchio nero di raggio  $r$  con quadrati bianchi di lato  $\ell$ , anche sovrapponendoli se utile. Sia  $N(r, \ell)$  il numero minimo di quadrati necessari per coprire il cerchio.

Si determini:

1. una stima per eccesso di  $N(r, \ell)$ , in funzione di  $r$  e  $\ell$ ;
2. una stima per difetto di  $N(r, \ell)$ , in funzione di  $r$  e  $\ell$ ;
3. una stima per difetto del massimo  $r$  tale che  $N(r, \ell) \leq 1$ , in funzione di  $\ell$ ;
4. una stima per difetto del massimo  $r$  tale che  $N(r, \ell) \leq 2$ , in funzione di  $\ell$ ;
5. una stima per difetto del massimo  $r$  tale che  $N(r, \ell) \leq 3$ , in funzione di  $\ell$ .

NB: la valutazione dell'esercizio sarà crescente con la qualità delle stime proposte.

**Esercizio 3.** La Scuola Sant'Anna vuole allestire una lotteria tra i propri studenti. Chi vuole giocare compra un biglietto e la sua vincita viene determinata nella maniera seguente: vengono posizionate due urne uguali, ognuna delle quali contiene 10 palline, numerate da 0 a 9, il giocatore estrae a caso una pallina da ognuna delle due urne e riceverà una vincita in Euro pari al prodotto dei numeri estratti.

1. Determinare il prezzo minimo del biglietto (in Euro) per cui in media la Scuola non andrà in perdita allestendo la lotteria.
2. Approfittando della distrazione dei commissari, uno studente sposta per scherzo una pallina, presa a caso, da un'urna all'altra; stabilire il prezzo minimo del biglietto, come sopra, in questa nuova situazione.