SCUOLA SUPERIORE DI STUDI UNIVERSITARI
E DI PERFEZIONAMENTO SANT'ANNA

CONCORSO DI AMMISSIONE AL I ANNO - PROVA SCRITTA DI MATEMATICA
4 SETTEMBRE 2017

Si ricorda che i passaggi devono essere *adeguatamente* giustificati. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Esercizio 1. In un'urna ci sono 100 palline, alcune bianche, le altre nere. Si sa che:

(a) il numero delle palline bianche è maggiore o uguale di quello delle nere;

(b) se si estraggono contemporaneamente due palline dall'urna, la probabilità che siano entrambe dello stesso colore è uguale a quella che siano di colore diverso.

1. Determinare il numero delle palline bianche.

2. Se si sostituisce a 100 un intero N, discutere il problema precedente al variare di N.

Esercizio 2. Nick ha un orologio con le lancette, con le ore regolarmente numerate da 1 a 12, a cui tiene molto. Il suo amico Brigante, per scherzo, sostituisce numero e tipo degli ingranaggi in modo tale che ogni lancetta continui a muoversi con velocità angolare costante ma, ahinoi, sconosciuta.

Per capire la velocità delle due lancette, Nick vuole controllare il loro moto fra due rintocchi consecutivi del campanile di Pisa e osserva che:

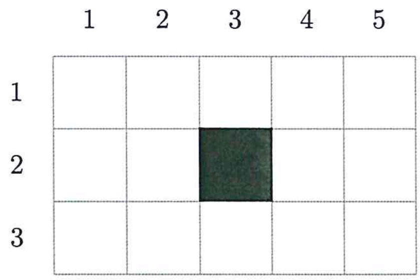
- al primo rintocco, le due lancette non sono sovrapposte;
- al rintocco successivo, quindi dopo esattamente un'ora,
  a) la lancetta più corta ha fatto più di 2 ma meno di 3 giri in senso orario;
  b) le due lancette si sono sovrapposte 4 volte.

1. È possibile che la lancetta più lunga sia ferma?

2. Dopo un'ora quanti giri può aver fatto la lancetta lunga?

3. Durante un minuto (di tempo vero scandito dal campanile di Pisa), la lancetta più veloce di quanto può essersi spostata?

Esercizio 3. Una scacchiera $n \times m$ (in figura quella 3×5) contiene $nm - 1$ piastrelle quadrate ed uno spazio vuoto (in nero nella figura). Una *mossa* è lo spostamento di una piastrella in un quadrato adiacente (che deve essere necessariamente vuoto).



1. Mostrare che per spostare lo spazio vuoto dalla posizione (h, k) alla posizione $(h + p, k + q)$ il numero minimo di *mosse* è $|p| + |q|$.

2. Nel caso di scacchiera 3×5 determinare il minimo numero di *mosse* per portare una piastrella dalla posizione $(1, 1)$ alla posizione $(3, 5)$ nel caso in cui lo spazio vuoto si trovi inizialmente in $(2, 1)$ e nel caso in cui lo spazio vuoto si trovi inizialmente in $(1, 2)$.

3. Nel caso di scacchiera 3×5, sapendo che lo spazio vuoto potrebbe inizialmente trovarsi in una qualsiasi casella diversa da $(1, 1)$, determinare il *Valor Medio* del numero minimo di *mosse* per spostare una piastrella dalla posizione $(1, 1)$ alla posizione $(3, 5)$.

SCUOLA SUPERIORE SANT'ANNA

CONCORSO DI AMMISSIONE AL I ANNO DI INGEGNERIA

PROVA SCRITTA DI FISICA

5 SETTEMBRE 2017

Durante lo svolgimento degli esercizi si discutano eventuali approssimazioni. Effettuare tutti i calcoli in modo simbolico, sostituendo i valori solo alla fine. Si ricorda che i passaggi devono essere adeguatamente giustificati. Ogni esercizio verrà valutato in base alla correttezza ed alla chiarezza delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

Esercizio 1: Il forno e i tarallucci

In un biscottificio industriale, i biscotti (raggio **r** = 3 cm) vengono cotti su teglie quadrate (lato **L** = 1 m) scorrendo su un nastro trasportatore (**v** = 1 cm/s) all'interno di un forno di lunghezza **F** (Figura 1A). Il grado di cottura dei biscotti è controllato da una telecamera con apertura angolare $\alpha = \pi/2$ rad (Figura 1B) attivata da una fotocellula posta a distanza **D** = 50 cm dall'asse della telecamera. La telecamera produce immagini monocromatiche da 640x640 pixel in cui a ciascun pixel in posizione (x, y) è associato un valore **I(x, y)** che varia da 0 (bianco) a 255 (nero). Esempi tipici di fotografie delle teglie con biscotti sono riportati in Figura 1C.

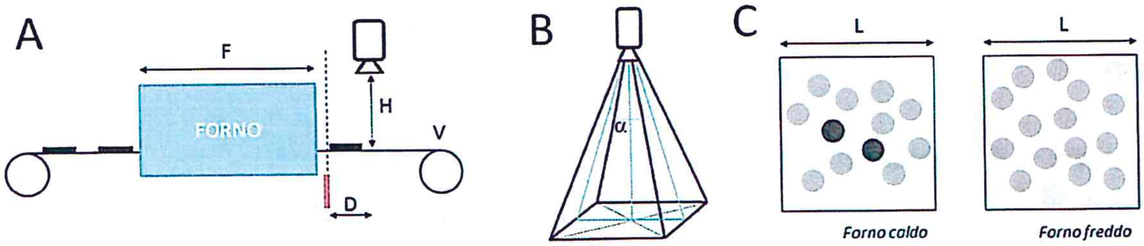


Figura 1

Si consideri che ogni biscotto cuoce uniformemente e che la sua cottura ideale è rappresentata da un valore del pixel pari a 100 ± 10; i biscotti poco cotti sono più chiari (ma mai bianchi), mentre quelli troppo cotti sono più scuri. Sapendo che le teglie hanno una superficie bianca:

1. Determinare l'altezza ottimale H dal nastro alla quale posizionare la telecamera e il ritardo con cui programmare l'acquisizione dell'immagine a partire dall'istante di attivazione della fotocellula.
2. Descrivere un metodo che, in funzione del valore dei pixel dell'immagine, stimi il numero N di biscotti presenti nella teglia, il numero N_p di quelli poco cotti ed il numero N_t di quelli troppo cotti.
3. Descrivere schematicamente la sequenza di passi da effettuare per attivare la telecamera all'istante opportuno ed elaborare l'immagine prodotta per calcolare N, N_p ed N_t utilizzando il metodo precedentemente proposto.

NOTA: Per la descrizione richiesta nel punto 3 è possibile utilizzare anche le seguenti funzioni:

1. **LeggiFotocellula**: restituisce il valore della fotocellula: 1 se il campo è libero, 0 se ostruito;
   Esempio: F = LeggiFotocellula *// mette in F il valore letto dalla fotocellula*
2. **ScattaFoto**: acquisisce un'immagine dalla telecamera e aggiorna la funzione I(x,y);
   Esempio: ScattaFoto
3. **LeggiTempo**: restituisce il tempo dall'accensione dell'impianto in millisecondi.
   Esempio: t = LeggiTempo *// mette in t il tempo corrente*

Esercizio 2: Il pistone e la massa

Un pistone a sezione circolare di diametro D = 5 cm è collegato ad un cavo che, attraverso un sistema di carrucole, muove una massa m = 100 Kg, come illustrato in Figura 2. In condizioni di equilibrio, il pistone contiene 0.1 moli d'aria (si assuma l'ipotesi di gas perfetto e di essere in condizioni standard).

Il cilindro viene compresso a temperatura costante fino a ridurre il volume dell'aria in esso contenuta di un fattore 1/3. A sistema fermo, al tempo t=0, il gas viene quindi lasciato libero di espandersi.

1. Si determini la tensione del cavo e l'accelerazione della massa sospesa al tempo t=0.
2. Si calcoli la velocità massima che può essere raggiunta dalla massa sospesa.
3. In condizione di equilibrio, alla massa viene impresso un piccolo spostamento x. Si determini la frequenza naturale delle oscillazioni della massa.

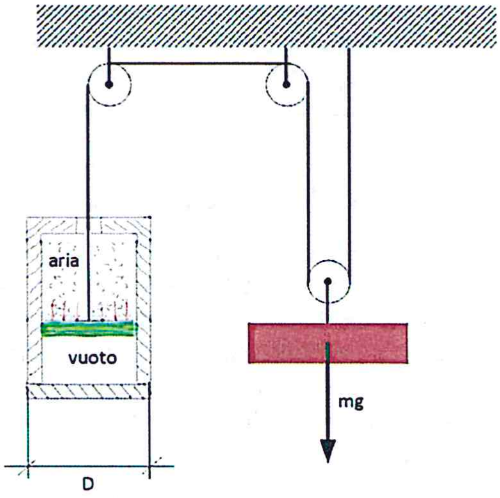


Figura 2

Esercizio 3: Il blocco sul nastro

Un blocco omogeneo di massa m, collegato ad una molla con coefficiente elastico k, è appoggiato su un nastro trasportatore come illustrato in Figura 3.

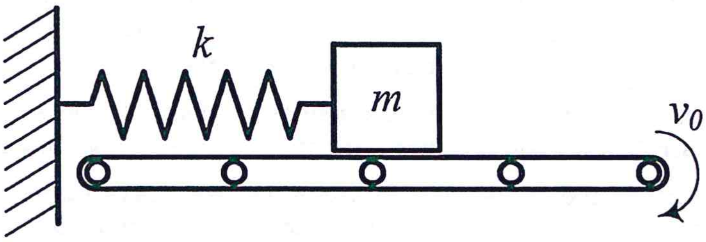


Figura 3

Il contatto tra il blocco ed il nastro presenta un coefficiente di attrito statico μ_s e un coefficiente di attrito dinamico μ_d indipendente dalla velocità di sfregamento ($\mu_d < \mu_s$). Al tempo t=0 la molla è nella posizione di riposo, il nastro si muove con velocità v_0 verso destra, ed il blocco si muove solidalmente con il nastro.

1) Calcolare la posizione in cui il blocco inizia a strisciare sul nastro.
2) Illustrare un grafico qualitativo dell'andamento della velocità del blocco in funzione del tempo.
3) Calcolare la posizione successiva in cui il blocco torna a spostarsi senza strisciare.